2019年考研数学二真题解析

一、选择题　1—8小题．每小题4分，共32分．

1．当$x\to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【详解】当$x\to 0$时，$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以$x-\tan x=-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$，所以$k=3$．

2．曲线$y=x\sin x+2\cos x$ $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$的拐点是（　　）

（A）$(0,2)$　　（B）$(\pi,-2)$　　（C）$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$　　（D）$(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2})$

【答案】（D）

【详解】$y=x\sin x+2\cos x$，$y'=x\cos x-\sin x$，$y''=-x\sin x$，$y'''=-\sin x-x\cos x$；

令$y''=-x\sin x=0$得$x_1=0,x_2=\pi$，且$f'''(\pi)\neq 0$，所以$(\pi,-2)$是曲线的拐点；

而对于点$(0,0)$，由于$f'''(0)=0$，而$f^{(4)}(0)\neq 0$，所以不是曲线的拐点．

3．下列反常积分发散的是　　　　（　　）

（A）$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　（B）$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$　　（C）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　（D）$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$

【答案】（D）

【详解】（1）当$x\to+\infty$时，$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$是关于$\frac{1}{x}$的一阶无穷小，当然$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散；

（2）用定义：$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\big|_0^{+\infty}=+\infty$，当然$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$发散．

4．已知微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则a,b,c依次为（　　）

（A）$1,0,1$　　（B）$1,0,2$　　（C）$2,1,3$　　（D）$2,1,4$

【答案】（D）

【详解】（1）由非齐次线性方程的通解可看出$r_1=r_2=-1$是特征方程$r^2+ar+b=0$的实根，从而确定$a=2,b=1$；

（2）显然，$y^*=e^x$是非齐次方程的特解，代入原方程确定$c=4$．

5．已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le\frac{\pi}{2}\}$，记$I_1=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，$I_2=\iint\limits_D\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，

$I_3=\iint\limits_D(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ ，则 （　　）

（A）$I_3<I_2<I_1$　（B）$I_2<I_1<I_3$　（C）$I_1<I_2<I_3$　（D）$I_2<I_3<I_1$

【答案】（A）

【详解】（1）显然在区域 D $0\le x^2+y^2\le\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ ，此时由结论当 $x>0$ 时 $x>\sin x$ 知道 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}$ ，所以 $I_1>I_2$；

（2）当 $x>0$ 时，令 $f(x)=1-\cos x-\sin x$，则 $f'(x)=\sin x-\cos x$， $f''(x)=\sin x+\cos x$；

令 $f'(x)=0$ 得到在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 唯一驻点 $x=\frac{\pi}{4}$，且 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$，也就是 $f(x)=1-\cos x-\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 取得极小值 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$，在 $x=0,x=\frac{\pi}{2}$ 同时取得在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$，也就有了结论，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时， $1-\cos x<\sin x$，也就得到了 $I_3<I_2$；

由（1）、（2）可得到 $I_3<I_2<I_1$.

6．设函数 $f(x),g(x)$ 的二阶导函数在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x)$， $y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切及曲率相等的 （　　）

（A）充分不必要条件　**（B）**充分必要条件　**（C）**必要不充分条件　**（D）**既不充分也不必要条件

【答案】（A）

【详解】充分性：（1）当 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 进，由洛必达法则，

$$0=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{x-a}=\frac{1}{2}(f''(a)-g''(a))\Rightarrow f'(a)=g'(a)$$

也就是两条曲线在 $x=a$ 对应的点处相切；

（2） $0=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{x-a}=\frac{1}{2}(f''(a)-g''(a))\Rightarrow f''(a)=g''(a)$

由曲率公式 $k=\frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ 可知两条曲线在 $x=a$ 对应的点处曲率相等.

必要性不正确的原因在于，虽然相切能得到 $f'(a)=g'(a)$，但在相切前提下，曲率相等，只能得到

$\left|f''(a)\right|=\left|g''(a)\right|$，不能确定 $f''(a)=g''(a)$，当然得不到 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$.

7. 设 A 是四阶矩阵，A^* 为其伴随矩阵，若线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系中只有两个向量，则 $r(A^*)=$（　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

【答案】（A）

【详解】线性方程组 $Ax=0$ 基础解系中只有两个向量，也就是 $4-r(A)=2\Rightarrow r(A)=2<n-1=3$，所以 $r(A^*)=0$.

8．设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形是（　　）

（A） $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　**（B）** $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　**（C）** $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　**（D）** $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】（C）

【详解】假设 λ 是矩阵 A 的特征值，由条件 $A^2+A=2E$ 可得 $\lambda^2+\lambda-2=0$，也就是矩阵 A 特征值只可能是 1 和 -2 . 而 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$，所以三个特征值只能是 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，根据惯性定理，二次型的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(x+2^x\right)^{\frac{2}{x}}=$__________.

【答案】 $4e^2$

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(x+2^x\right)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1+x+2^x-1\right)^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2(x+2^x-1)}{x}}=e^{2(1+\ln2)}=4e^2$

10. 曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3\pi}{2}$ 对应点处的切线在 y 的截距为______________.

【答案】 $2+\dfrac{3\pi}{2}$

【详解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t},\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{3\pi}{2}}=-1$，所以切线方程为 $y=1-(x-\dfrac{3\pi}{2}-1)=-x+\dfrac{3\pi}{2}+2$，在 y 的截距为 $2+\dfrac{3\pi}{2}$.

11.设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____________.

【答案】$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$

【详解】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y^3}{x^2}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=f\left(\dfrac{y^2}{x}\right)+\dfrac{2y^2}{x}f'\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$，$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=yf\left(\dfrac{y^2}{x}\right)$.

12．曲线 $y=\ln\cos x\ (0\le x\le\dfrac{\pi}{6})$ 的弧长为__________.

【答案】$\dfrac{1}{2}\ln 3$

【详解】$ds=\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec xdx$

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec xdx=\ln(\sec x+\tan x)|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

13．已知函数 $f(x)=x\int_1^x\dfrac{\sin t^2}{t}dt$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$____________.

【答案】$\dfrac{1}{4}(\cos 1-1)$.

【详解】(1）用定积分的分部积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=xf(x)|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt)dx-\int_0^1 x\sin x^2dx\\&=-\frac{1}{2}\int_0^1(\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt)dx^2-\int_0^1 x\sin x^2dx\\&=-\frac{1}{2}x^2\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\,|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2dx\\&=\frac{1}{4}\cos x^2\,|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)\end{aligned}$$

（2）转换为二重积分：

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}dt\right)dx=-\int_0^1 xdx\int_x^1\frac{\sin t^2}{t}dt=-\int_0^1\frac{\sin t^2}{t}dt\int_0^t xdx=-\frac{1}{2}\int_0^1 t\sin t^2dt=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$$

14．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{pmatrix}$，$A_{ij}$ 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $A_{11}-A_{12}=$__________.

【答案】-4

【详解】 $A_{11}-A_{12}=A_{11}-A_{12}+0A_{13}+0A_{14}=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=-4$.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}&,x>0\\xe^x+1,&x\le 0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并求函数 $f(x)$ 的极值.

【详解】 当 $x>0$ 时，$f(x)=x^{2x}=e^{2x\ln x}$，$f'(x)=2x^{2x}(\ln x+1)$；

当 $x<0$ 时，$f(x)=xe^x+1$，$f'(x)=(x+1)e^x$；

在 $x=0$ 处，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x^{2x}(\ln x-1)}{1}=-\infty$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

综合上述：$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1),x>0\\(x+1)e^x,\quad x<0\end{cases}$；

令 $f'(x)=0$ 得到 $x_1=-1,x_2=\dfrac{1}{e}$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>\dfrac{1}{e}$ 时，$f'(x)>0$；

故 $x_1=-1$ 是函数的极小值点，极小值为 $f(-1)=1-e^{-1}$；$x=0$ 是函数的极大值点，极大值为 $f(0)=1$；

$x_2=\dfrac{1}{e}$ 是函数的极小值点，极小值为 $f(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$.

16.（本题满分 10 分）求不定积分 $\int\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx$.

【详解】

$$\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int\left(-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$$

17.（本题满分 10 分）设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$ 的表达式；

（2）设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体的体积.

【详解】（1）这是一个一阶线性非齐次微分方程.

先求解对应的线性齐次方程 $y'-xy=0$ 的通解：$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}$，其中 C 为任意常数；

再用常数变易法求 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 通解，设 $y=C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ 为其解，代入方程，得

$C'(x)e^{\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}},C'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$C(x)=\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C_1$，也就是通解为：$y=(\sqrt{x}+C_1)e^{\frac{x^2}{2}}$

把初始条件 $y(1)=\sqrt{e}$ 代入，得 $C_1=0$，从而得到 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）旋转体的体积为 $V_x=\pi\int_1^2 y(x)^2dx=\pi\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(e^4-e)$.

18.（本题满分 10 分）设平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

【详解】 显然积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4\}$ 关于 y 轴对称，由对称性，显然 $\iint\limits_D\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=0$；

$$\iint\limits_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\iint\limits_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}r\sin\theta dr=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^5\theta d\theta=\frac{43\sqrt{2}}{120}$$

19.（本题满分 10 分）设 n 是正整数，记 S_n 为曲线求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (0\le x\le n\pi)$ 与 x 轴所形成图形的面积，求 S_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

【详解】先求曲线与 x 轴的交点：令 $e^{-x}\sin x=0$ 得 $x=k\pi,k=0,1,2,\cdots n$

当 $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ 时，$y=e^{-x}\sin x>0$；当 $2k\pi+\pi<x<(2k+2)\pi$ 时，$y=e^{-x}\sin x<0$.

由不定积分 $\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ 可得

$\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-x}\sin xdx=\frac{1}{2}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})$，$\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi}e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-2k\pi-\pi}(1+e^{-\pi})$

所求面积为 $S_n=\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$.

当 n 为奇数时，

$$\begin{aligned}S_{2n+1}&=\int_0^{(2n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi}e^{-x}\sin xdx-\sum_{k=0}^{n}\int_{2k\pi+\pi}^{2k\pi+2\pi}e^{-x}\sin xdx\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}e^{-2k\pi-\pi}(1+e^{-\pi})\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}e^{-2k\pi}(1+e^{-\pi})^2=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})^2\frac{1-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}(1-e^{-2(n+1)\pi})\end{aligned}$$

同理：$S_{2n}=\int_0^{(2n)\pi}e^{-x}\left|\sin x\right|dx=\frac{1}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}(1-e^{-2n\pi})$

显然，有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}\frac{1+e^{\pi}}{1-e^{-\pi}}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\frac{1+e^{\pi}}{1-e^{-\pi}}$.

20.（本题满分 11 分）已知函数 $u(x,y)$ 满足关系式 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$. 求 a,b 的值，使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下，上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

【详解】在变换 $u(x,y)=v(x,y)e^{ax+by}$ 之下

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+av(x,y)e^{ax+by}$， $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+bv(x,y)e^{ax+by}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}e^{ax+by}+2a\frac{\partial v}{\partial x}e^{ax+by}+a^2v(x,y)e^{ax+by}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}e^{ax+by}+2b\frac{\partial v}{\partial y}e^{ax+by}+b^2v(x,y)e^{ax+by}$；

把上述式子代入关系式 $2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，得到

$$2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+4a\frac{\partial v}{\partial x}+(3-4b)\frac{\partial v}{\partial y}+(2a^2-2b^2+3b)v(x,y)=0$$

根据要求，显然当 $a=0,b=\frac{3}{4}$ 时，可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

21.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(0)=0,f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)dx=1$，证明：

（1）至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $f''(\eta)<-2$.

证明 （1）令 $\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $\Phi(0)=0,\Phi(1)=\int_0^1 f(x)dx=1$，

则由于 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 连续，则 $\Phi(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$，则由拉格朗日中值定理，至少存在一点 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $\Phi'(\xi)=\Phi(1)-\Phi(0)$，也就是 $1=\int_0^1 f(x)dx=f(\xi_1)=f(1)$；

对 $f(x)$ 在 $\left(\xi_1,1\right)$ 上用罗尔定理 ，则至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（2）令 $F(x)=f(x)+x^2$，则显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 具有二阶导数，且 $F(0)=0,F(1)=2,F(\xi_1)=1+\xi_1^2$.

对 $F(x)$ 分别在 $[0,\xi_1],[\xi_1,1]$ 上用拉格朗日中值定理，

至少存在一点 $\eta_1\in(0,\xi_1)$，使得 $F'(\eta_1)=\dfrac{F(\xi_1)-F(0)}{\xi_1-0}=\dfrac{1+\xi_1^2}{\xi_1}$；

至少存在一点 $\eta_2\in(\xi_1,1)$，使得 $F'(\eta_2)=\dfrac{F(\xi_1)-F(1)}{\xi_1-1}=1+\xi_1$；

对 $F'(x)=f'(x)-2x$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上用拉格朗日中值定理，则至少存在一点 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得

$F''(\eta)=\dfrac{F'(\eta_2)-F'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=\dfrac{1-\dfrac{1}{\xi_1}}{\eta_2-\eta_1}<0$，也就是 $f''(\eta)<-2$.

22.（本题满分 11 分）

已知向量组 I：$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\a^2+3\end{pmatrix}$；

向量组 II：$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\a+3\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1-a\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\a^2+3\end{pmatrix}$. 若向量组 I 和向量组 II 等价，求常数 a 的值，并将 β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【详解】向量组 I 和向量组 II 等价的充分必要条件是

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}$$

（1）当 $a=1$ 时，显然，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，两个向量组等价.

此时，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$ 的通解为 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$，也就是

$\beta_3=(-2k+3)\alpha_1+(k-2)\alpha_2+k\alpha_3$，其中 k 为任意常数；

（2）当 $a\neq 1$ 时，继续进行初等行变换如下：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a+1&1&-1&a+1\end{pmatrix}$$

显然，当 $a\neq -1$ 且 $a\neq 1$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，

同时 $\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\1&-1&a+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&2\\0&-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，也就是

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2$，两个向量组等价.

这时，β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，表示法唯一：$\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$.

23.（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

（1）求 x,y 之值；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

【详解】（1）由矩阵相似的必要条件可知：$\begin{cases}|A|=|B|\\trA=trB\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2(-2x+4)=-2y\\-4+x=1+y\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=3\\y=-2\end{cases}$.

（2）解方程组 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+2&2&-1\\-2&\lambda-3&2\\0&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda+1)=0$ 得矩阵 A 的三个特征值

$\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$；

分别求解线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0\quad(i=1,2,3)$ 得到分属三个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$ 的线性无关

的特征向量为：$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

令 $P_1=\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，则 P_1 可逆，且 $P_1^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$；

同样的方法，可求得属于矩阵 B 的三个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$ 的线性无关的特征向量为：

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix}.$$

令 $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 P_2 可逆，且 $P_2^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$；

由前面 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，可知令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，就满足 $P^{-1}AP=B$.