

2020 年全国硕士研究生招生考试数学三答案

数学（三）

一、选择题

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a}$

(A) $b \sin a$

(B) $b \cos a$

(C) $b \sin f(a)$

(D) $b \cos f(a)$

【答案】B.

【解析】 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} \xrightarrow{\text{中值定理}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \xi [f(x) - a]}{x - a} = b \lim_{x \rightarrow a} \cos \xi$, ξ 介

于 a 与 $f(x)$ 之间, $\lim_{x \rightarrow a} \cos \xi = \cos a$ 且 $f(a) = a$. 故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = b \cos a$.

(2) 函数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

【答案】C.

题目中 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)}$ 中,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln(1+x)}{(e^x - 1)(x-2)} = \frac{e^{-1}}{-2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \frac{1}{-2e},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+1|}{(e - 1)(1-2)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln |1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{1}{2-1}} \ln |1+2|}{(e^2 - 1)(2-2)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \ln|1+x|}{(e^x - 1)(x-2)} = \infty. \text{ 故选(C)}$$

(3) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 则

(A) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是奇函数

(B) $\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 是偶函数

(C) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是奇函数

(D) $\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)] dt$ 是偶函数

【答案】A.

【解析】对于(A), 由于 $F'(x) = \left[\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt \right]' = \cos f(x) + f'(x)$,

$$F'(-x) = \cos[f(-x)] + f'(-x)$$

$$= \cos f(x) + f'(x).$$

所以 $F'(x)$ 为偶函数, 则 $F(x) = \int_0^x [\cos f(t) + f'(t)] dt$ 为奇函数, 故(A)正确,

(B)错误.

(4) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 的收敛区间为 $(-2, 6)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^{2n}$ 的收敛区间为

(A) $(-2, 6)$

(B) $(-3, 1)$

(C) $(-5, 3)$

(D) $(-17, 15)$

【答案】C.

【解析】由于 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛半径相同.

故由题设, $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-2)^n$ 收敛区间为 $(-2, 6)$, 则收敛半径 $R=4$. 因此,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛区间为 $(-1-4, -1+4)$, 即 $(-5, 3)$.

(5) 设 4 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 不可逆, a_{12} 的代数余子式 $A_{12} \neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为矩

阵 A 的列向量组, A^* 为 A 的伴随矩阵, 则方程组 $A^*x = 0$ 的通解为

(A) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

(B) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

(C) $x = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

(D) $x = k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$, 其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数

【答案】C.

【解析】因为 A 不可逆, 所以 $r(A) < 4$. 又因为 $A_{12} \neq 0$, 故 $r(A^*) \geq 1$, 所以 $r(A) \geq n - 1 = 3$, $r(A) = 3$, $r(A^*) = 1$, $|A| = 0$.

由于 $A_{12} \neq 0$ 所以 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. $A^*x = 0$ 的基础解系中有 $4 - 1 = 3$ 个无关解向量, $A^*A = |A|E = 0$, 所以 A 的列向量为 $A^*x = 0$ 的解.

因此 $A^*x = 0$ 的通解为 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_3 + k_3\alpha_4$.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 属于特征值为 1 的线性无关的特征向量, α_3

为 A 的属于特征值 -1 的特征向量, 则满足 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的可逆矩阵

P 为

(A) $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_2, -\alpha_3)$

(B) $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, -\alpha_3)$

(C) $(\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_3, \alpha_2)$

(D) $(\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_3, \alpha_2)$

【答案】D.

【解析】由于 α_1, α_2 线性无关, 且为特征值 1 对应的特征向量. 所以 1 至少为 2 重特征值.

因为 α_3 为 -1 对应的特征向量, A 为 3 阶矩阵, 所以 A 的特征值为 1, 1, -1.

又因为 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, 所以 P 的第一列、第三列为 1 对应的特征向量.

P 的第二列为 -1 对应的特征向量.

故 P 的第二列应为 α_3 的线组合, 第一列、第三列为 α_1, α_2 的线性组合. 故选 (D).

(7) 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0$,

$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{12}$, 则 A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为

- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$
(C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$

【答案】D.

【解析】法 1: A, B, C 中恰有一个事件发生的概率为 $P(\overline{A}\overline{B}C)+P(\overline{A}B\overline{C})+P(A\overline{B}\overline{C})$

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}C)=P(A)-P(AB)-[P(AC)-P(ACB)]$$

$$P(\overline{A}B\overline{C})=P(\overline{A}B)-P(\overline{A}BC)=P(B)-P(AB)-[P(BC)-P(BCA)]$$

$$P(A\overline{B}\overline{C})=P(\overline{B}\overline{C})-P(\overline{B}\overline{C}A)=P(C)-P(CB)-[P(CA)-P(CAB)]$$

因为 $P(AB)=0$, 而 $ABC \subset AB$, 则 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB)=0$, 故 $P(ABC)=0$

将题干的已知代入以上三个式子中, 得

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}, \quad P(\overline{A}B\overline{C})=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}, \quad P(A\overline{B}\overline{C})=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$

故所求概率为 $\frac{2}{12}+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$, 故选(D)

法 2: $p=P(A+B+C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)$

$$P(AB)=0 \Rightarrow P(ABC)=0$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{7}{12}$$

$$p=P(A+B+C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+2P(ABC)=\frac{7}{12}-0-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+0=\frac{5}{12}. \text{ 故选(D)}$$

(8) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量

中服从标准正态分布且与 X 独立的是

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$

【答案】C.

【解析】由题知, $\text{Cov}(X, Y) = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{4} = -1$,

而只有 $\text{Cov}(X, X+Y) = D(X) + \text{Cov}(X, Y) = 0$,

故与 X 相互独立的只有(A) (C);

又因为 $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 3$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}(X+Y) \sim N(0, 1)$, 选(C).

二、填空题

(9) 设 $z = \arctan[xy + \sin(x+y)]$, 则 $dz|_{(0, \pi)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(\pi-1)dx - dy$.

【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0, \pi)} = \frac{y + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}|_{(0, \pi)} = \frac{\pi + \cos \pi}{1 + \sin^2 \pi} = \pi - 1$

$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0, \pi)} = \frac{x + \cos(x+y)}{1 + [xy + \sin(x+y)]^2}|_{(0, \pi)} = \frac{\cos \pi}{1 + \sin^2 \pi} = -1$

$dz|_{(0, \pi)} = (\pi-1)dx - dy$

(10) 曲线 $x + y + e^{2xy} = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为_____.

【答案】 $y = x - 1$.

【解析】方程两边对 x 求导得, $1 + y' + e^{2xy}(2y + 2xy') = 0$, 代入 $x=0, y=-1$ 得 $y'=1$, 故切线方程为 $y = x - 1$

(11) 设某厂家产品的产量为 Q , 成本 $C(Q) = 100 + 13Q$, 设产品的单价为 p ,

需求量 $q(p) = \frac{800}{p+3} - 2$. 则该厂家获得最大利润时的产量为_____.

【答案】 8.

【解析】由需求函数 $Q(P) = \frac{800}{p+3} - 2$, 可得 $P = \frac{800}{Q+2} - 3$,

利润函数 $L(Q) = PQ - C(Q) = \left(\frac{800}{Q+2} - 3\right)Q - (100 + 13Q) = -\frac{1600}{Q+2} - 16Q + 700$

$L'(Q) = \frac{1600}{(Q+2)^2} - 16 = 0$, 解得 $Q = 8$.

$L''(Q) = \frac{-3200}{(Q+2)^3}|_{Q=8} = -\frac{16}{5} < 0$, 当 $Q = 8$ 时, $L(Q)$ 最大.

(12) 设平面区域 $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为_____.

【答案】 $\pi \ln 2 - \frac{\pi}{3}$.

【解析】 $V_y = \int_0^1 2\pi x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{2} \right) dx = 2\pi \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx - \pi \int_0^1 x^2 dx$

$$= \pi \ln(1+x^2) \Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^1 = \pi \ln 2 - \frac{\pi}{3}$$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ _____.

【答案】 $a^4 - 4a^2$.

【解析】 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & a \\ -1 & 0 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$

$$= -a \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ a & 2a \end{vmatrix} - 2a \begin{vmatrix} 0 & a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -a(2a - a^3) - 2a^2$$

$$= a^4 - 4a^2.$$

(14) 设随机变量 X 的概率分布 $P\{x=k\} = 2^{-\frac{1}{k}}, k=1, 2, 3$, Y 表示 X 被 3 整除的余数, 则 $EY =$ _____.

【答案】 $\frac{8}{7}$

【解析】 Y 表示 X 被 3 除的余数, 那么 Y 的取值有 0, 1, 2, 其取值的概率如下:

$$P\{Y=0\} = \sum_{k=1}^{\infty} P\{X=3k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7},$$

$$P\{Y=1\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=3k+1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{4}{7},$$

$$P\{Y=2\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=3k+2\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k+2}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{2}{7},$$

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{2}{7} = \frac{8}{7}$$

三、解答题

(15) 已知 a, b 为常数, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ 与 $\frac{b}{n^a}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时是等价无穷小, 求 a, b .

【解析】由等价无穷小的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{b}{n^a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n \ln(1+\frac{1}{n})}{n}} - e}{\frac{b}{n^a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(e^{\frac{n \ln(1+\frac{1}{n})}{n} - 1} - 1)}{\frac{b}{n^a}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(n \ln(1+\frac{1}{n}) - 1)}{\frac{b}{n^a}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e(\ln(1+t) - t)}{bt^a} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e(\ln(1+t) - t)}{bt^{a+1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e(-\frac{1}{2}t^2)}{bt^{a+1}} = 1$$

则若使该极限存在必有 $a+1=2$, 即 $a=1$. 可得 $b = -\frac{1}{2}e$.

(16) 求函数 $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - xy$ 的极值

【解析】由
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 24y^2 - x = 0 \end{cases}$$
 计算可得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48y.$$

当 $x=0, y=0$ 时, $A=0, B=-1, C=0$, 则 $AC-B^2=-1<0$, 所以 $(0,0)$ 点不是极值点;

当 $x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{12}$ 时, $A=1, B=-1, C=4$, 则 $AC-B^2=3>0$ 且 $A>0$, 所以 $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ 为极小值点, 极小值

$$f(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}) = -\frac{1}{216}.$$

(17) 设函数 $y = f(x)$ 满足 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = -1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 设 $a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} f(x)dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

【解析】(I) $y'' + 2y' + 5y = 0$, 由特征方程知, $r^2 + 2r + 5 = 0$, 可得

$$r_1 = -1 + 2i, r_2 = -1 - 2i,$$

则方程的通解

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

又因 $f(0) = 1, f'(0) = -1$, 所以 $C_1 = 1, C_2 = 0$, 因此 $f(x) = e^{-x} \cos 2x$.

$$(II) \quad a_n = \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{5e^{n\pi}},$$

设
$$I = \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx \xrightarrow{\text{分部积分}} \frac{1}{2} \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} d\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^{-x} \sin 2x \Big|_{n\pi}^{+\infty} - \int_{n\pi}^{+\infty} \sin 2x de^{-x} \right]$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} d\cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4} \left[e^{-x} \cos 2x \Big|_{n\pi}^{+\infty} + \int_{n\pi}^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx \right],$$

所以
$$I = \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \Big|_{x=n\pi} - \frac{1}{4} I,$$

即
$$\frac{5}{4} I = \frac{1}{4} e^{-x} \cos 2x \Big|_{x=n\pi},$$

故
$$I = \frac{1}{5e^{n\pi}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi})^n = \frac{1}{5(e^{\pi}-1)}.$$

(18) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$, 连续函数 $f(x)$ 满足

$$f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + x \iint_D f(x, y) dx dy,$$

求
$$\iint_D xf(x, y) dx dy$$

【解析】令 $\iint_D f(x, y) dx dy = A$, 则 $f(x, y) = y\sqrt{1-x^2} + Ax$

$$\text{即 } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D (y\sqrt{1-x^2} + Ax) dx dy = \iint_D y\sqrt{1-x^2} dx dy$$

$$= 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3\pi}{16}, \text{ 故 } A = \frac{3\pi}{16}$$

$$\iint_D xf(x, y) dx dy = \iint_D [xy\sqrt{1-x^2} + Ax^2] dx dy = A \iint_D x^2 dx dy$$

$$= A \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{A}{2} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{128}$$

(19) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上具有连续导数, 已知 $f(0) = f(2) = 0$,

$M = \max_{x \in [0, 2]} \{|f(x)|\}$. 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $|f'(\xi)| \geq M$;

(II) 若对任意的 $x \in (0, 2)$, $|f'(x)| \leq M$, 则 $M = 0$.

【解析】(I) 设 $x = x_0$ 时 $|f(x_0)| = M$, 由拉格朗日定理

$$\exists \xi_1 \in (0, x_0) \text{ 使得 } |f'(\xi_1)| = \left| \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} \right| = \frac{|f(x_0)|}{x_0} = \frac{M}{x_0}$$

$$\exists \xi_2 \in (x_0, 2) \text{ 使得 } |f'(\xi_2)| = \left| \frac{f(x_0) - f(2)}{x_0 - 2} \right| = \frac{|f(x_0)|}{2 - x_0} = \frac{M}{2 - x_0}$$

$$\text{若 } x_0 \in (0, 1] \text{ 则取 } \xi = \xi_1, \text{ 有 } |f'(\xi)| = |f'(\xi_1)| = \frac{M}{x_0} \geq M$$

$$\text{若 } x_0 \in (1, 2) \text{ 则取 } \xi = \xi_2, \text{ 有 } |f'(\xi)| = |f'(\xi_2)| = \frac{M}{2 - x_0} \geq M$$

$$(II) \quad M = |f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = \left| \int_0^{x_0} f'(x) dx \right| \leq \int_0^{x_0} |f'(x)| dx \leq \int_0^{x_0} M dx \leq Mx_0$$

$$M = |f(x_0)| = |f(2) - f(x_0)| = \left| \int_{x_0}^2 f'(x) dx \right| \leq \int_{x_0}^2 |f'(x)| dx \leq \int_{x_0}^2 M dx \leq M(2 - x_0)$$

$$\text{故 } \begin{cases} M(1 - x_0) \leq 0 \\ M(1 - x_0) \geq 0 \end{cases} \text{ 同时成立}$$

若 $x_0 \neq 1$ 则显然 $M = 0$

$$\text{若 } x_0 = 1 \text{ 则 } M \leq \int_0^1 |f'(x)| dx \leq \int_0^1 M dx = M \text{ 且 } M \leq \int_1^2 |f'(x)| dx \leq \int_1^2 M dx = M$$

当且仅当区间 $(0, 1)$ 和 $(1, 2)$ 上 $|f'(x)| \equiv M$ 成立, 若假设 $M \neq 0$

要么 $f'(x) \equiv \pm M$ 与 $f(0) = f(2) = 0$ 矛盾

要么 $f'(x) = \begin{cases} \pm M & 0 < x < 1 \\ \mp M & 1 < x < 2 \end{cases}$, $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导, 与已知矛盾

故 $M=0$

(20) 设二次型 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2$, 其中 $a \geq b$.

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求正交矩阵 Q .

【解析】(I) 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{pmatrix}$, 则 $Q^T A Q = B$, 其中 Q 是正交矩阵. A 与 B 相似, 所以 A 与 B

有相同的特征值. $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$, 得到 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

$|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -2 \\ -2 & \lambda - b \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - 4 = 0$. 由 B 的特征值也为 $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$, 得 $ab = 4$, $a + b = 5$. 因为 $a \geq b$, 所以 $a = 4$, $b = 1$.

(II) 当 $\lambda_1 = 0$ 时, $(0E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_1 = (2, 1)^T$;

当 $\lambda_2 = 5$ 时, $(5E - A)x = 0$ 的基础解系为 $\alpha_2 = (1, -2)^T$.

当 $\lambda_1 = 0$ 时, $(0E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_1 = (1, -2)^T$;

当 $\lambda_2 = 5$ 时, $(5E - B)x = 0$ 的基础解系为 $\beta_2 = (2, 1)^T$.

令 $P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}$, $P_2^{-1}BP_2 = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 5 \end{pmatrix}$.

所以 $P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2$, 所以 $B = P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$.

$P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

因为 $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ 是正交矩阵, 所以 $Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

(21) 设 A 为二阶矩阵, $P = (a, Aa)$, 其中 a 是非零向量且不是 A 的特征向量:

(I) 证明 P 是可逆矩阵;

(II) 若 $A^2a + Aa - 6a = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

【解析】

(I) (解法一) 证明: 假设 P 不是可逆矩阵, 则 a 与 Aa 线性相关. 根据线性相关的定义, 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2 , 使得成立 $k_1a + k_2Aa = 0$. 若 $k_2 = 0$, 则有 $k_1a = 0$. a 是非零向量, 则 $k_1 = 0$, 与 k_1, k_2 不全为 0 矛盾,

所以 $k_2 \neq 0$. 所以有 $A\alpha = -\frac{k_1}{k_2}\alpha$, 与 α 不是 A 的特征向量矛盾, 所以假设不成立, 故 P 是可逆矩阵.

(解法二) 设 $A\alpha = \beta$, 则 $\beta \neq k\alpha$, 即 α, β 线性无关, 得 $P = (\alpha, \beta) = (\alpha, A\alpha)$ 可逆矩阵.

(II) 因为 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 所以 $AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 又因为 P 是可

逆矩阵, 所以 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. 记 $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

令 $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda & -6 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, 得到 B 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. A 与 B 相似, 则 A 的特征值也为

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 所以 A 可相似对角化.

(22) 设二维随机变量 (X, Y) 在正域 $D = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{1-x^2}\}$ 上服从均匀分布,

令 $Z_1 = \begin{cases} 1, & X - Y > 0 \\ 0, & X - Y \leq 0 \end{cases}, Z_2 = \begin{cases} 1, & X + Y > 0 \\ 0, & X + Y \leq 0 \end{cases}$, 求

(I) 求二维随机变量 (Z_1, Z_2) 的概率分布;

(II) 求 Z_1, Z_2 的相关系数.

【解析】

$$P\{Z_1 = 1\} = P\{X - Y > 0\} = \iint_{x > y} f(x, y) dx dy = \frac{\frac{1}{2}\pi \times 1^2}{\frac{1}{2}\pi \times 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{Z_1 = 0\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{Z_2 = 0\} = P\{X + Y \leq 0\} = \iint_{y \leq -x} f(x, y) dx dy = \frac{\frac{1}{2}\pi \times 1^2}{\frac{1}{2}\pi \times 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$P\{Z_2 = 1\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{又 } P\{Z_1 = 1, Z_2 = 0\} = 0$$

故联合概率分布:

$Z_1 \backslash Z_2$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$E(Z_1) = \frac{1}{4}, E(Z_2) = \frac{3}{4}, E(Z_1^2) = \frac{1}{4}, E(Z_2^2) = \frac{3}{4}, E(Z_1 Z_2) = \frac{1}{4}$$

$$D(Z_1) = E(Z_1^2) - E^2(Z_1) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16},$$

$$D(Z_2) = E(Z_2^2) - E^2(Z_2) = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = \frac{1}{16}$$

$$\rho_{Z_1 Z_2} = \frac{\text{Cov}(Z_1, Z_2)}{\sqrt{D(Z_1)}\sqrt{D(Z_2)}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$$

(23) 设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}, & t \geq 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 其中 θ, m

为参数且大于零.

(I) 求概率 $P\{T > t\}$ 与 $P\{T > s+t | T > s\}$, 其中 $s > 0, t > 0$;

(II) 任取 n 个这种元件做寿命试验, 测得它们的寿命分别为 $t_1, t_2, \dots, t_n$,

若 m 已知, 求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

【解析】(I) $P\{T > t\} = 1 - P\{T \leq t\} = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m}$

$$P\{T > s+t | T > s\} = \frac{P\{T > s+t, T > s\}}{P\{T > s\}} = \frac{P\{T > s+t\}}{P\{T > s\}} = \frac{e^{-\left(\frac{s+t}{\theta}\right)^m}}{e^{-\left(\frac{s}{\theta}\right)^m}} = e^{\frac{s^m - (s+t)^m}{\theta^m}}$$

$$(II) f(t) = F'(t) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^m} \frac{mt^{m-1}}{\theta^m}, & t > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

似然函数:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\left(\frac{t_i}{\theta}\right)^m} \frac{m t_i^{m-1}}{\theta^m} = e^{-\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m} m^n \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m-1} \right) \theta^{-nm}, (t_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\ln L(\theta) = -\frac{1}{\theta^m} \sum_{i=1}^n t_i^m + \ln m^n + \ln \left(\prod_{i=1}^n t_i^{m-1} \right) - nm \ln \theta$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{m}{\theta^{m+1}} \sum_{i=1}^n t_i^m - \frac{nm}{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$$

所以 θ 的最大似然估计值为: $\theta = \sqrt[m]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^m}$