2021 考研数学真题及答案解析

数学（三）

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分.每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求，把所选选项前的字母填在答题卡指定位置上.）

(1)当 $x \to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 的

(A)低阶无穷小.　(B)等价无穷小.　(C)高阶无穷小.　(D)同阶但非等价无穷小.

【答案】C.

【解析】因为当 $x \to 0$ 时，$\left[\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt\right]'=2x(e^{x^6}-1)\sim 2x^7$，所以 $\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)dt$ 是 x^7 高阶无穷小，正确答案为 C.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x},x\neq 0\\ 1,x=0\end{cases}$,在 $x=0$ 处

(A)连续且取极大值.　(B)连续且取极小值.

(C)可导且导数为 0.　(D)可导且导数不为 0.

【答案】D.

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，故 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，正确答案为 D.

(3)设函数 $f(x)=ax-b\ln x\ (a>0)$ 有两个零点，则 $\dfrac{b}{a}$ 的取值范围是

(A) $(e,+\infty)$.　(B) $(0,e)$.　(C) $(0,\dfrac{1}{e})$.　(D) $(\dfrac{1}{e},+\infty)$.

【答案】A.

【解析】令 $f(x)=ax-b\ln x=0$，$f'(x)=a-\dfrac{b}{x}$，令 $f'(x)=0$ 有驻点 $x=\dfrac{b}{a}$，$f\left(\dfrac{b}{a}\right)=a\cdot\dfrac{b}{a}-b\cdot\ln\dfrac{b}{a}<0$，从而 $\ln\dfrac{b}{a}>1$，可得 $\dfrac{b}{a}>e$，正确答案为 A.

(4)设函数 $f(x,y)$ 可微，$f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$

(A) $dx+dy$.　(B) $dx-dy$.　(C) dy.　(D) $-dy$.

【答案】C.

【解析】 $f_1'(x+1,e^x)+e^x f_2'(x+1,e^x)=(x+1)^2+2x(x+1)$　①

$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x$　②

分别将$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$带入①②式有

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1，\ f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2$$

联立可得 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，$df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$，故正确答案为 C.

(5)二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为

(A) $2,0$.　　(B) $1,1$.　　(C) $2,1$.　　(D) $1,2$.

【答案】B.

【解析】$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2=2x_2^{\ 2}+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

所以 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，故特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)\lambda$$

令上式等于零，故特征值为-1，3，0，故该二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 1.故应选 B.

(6)设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵，若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 表示任意常数，则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

【答案】D.

【解析】因为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一组标准正交向量组，则 $r(\boldsymbol{B})=3$，又 $\boldsymbol{B\alpha}_4=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k\boldsymbol{\alpha}_4$.而 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，故线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k 为任意常数.故应选 D.

(7)已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&1\\-1&2&-5\end{pmatrix}$，若下三角可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和上三角可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}$ 为对角矩阵，则 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ 可以分别取

(A)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(B)$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

(C)$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.　　(D)$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【答案】C.

【解析】

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\2&-1&1&0&1&0\\-1&2&-5&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&-1&3&-2&1&0\\0&2&-6&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&-3&2&-1&0\\0&0&0&-3&2&1\end{pmatrix}$$

$=(\boldsymbol{F},\boldsymbol{P})$,则 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-3&2&1\end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}\\\boldsymbol{E}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-3\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Lambda}\\\boldsymbol{Q}\end{pmatrix}$$，则 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.故应选 C.

(8)设 A，B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中不成立的是

(A)若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\bar{B})=P(A)$.

(B)若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\bar{A}|\bar{B})>P(\bar{A})$

(C)若 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

(D)若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】D.

【解析】$P(A|A\cup B)=\dfrac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$

$$P(\bar{A}|A\cup B)=\frac{P(\bar{A}(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)-P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$

因为 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，固有 $P(A)>P(B)-P(AB)$，故正确答案为 D.

(9)设 (X_1,Y_1)，(X_2,Y_2)，$\cdots$，(X_n,Y_n) 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^{\ 2},\sigma_2^{\ 2};\rho)$ 的简单随机样本，令

$\theta=\mu_1-\mu_2$，$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$\bar{Y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$，$\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}$ 则

(A) $E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^{\ 2}+\sigma_2^{\ 2}}{n}$.

(B) $E(\hat{\theta})=\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

(C) $E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2}{n}$.

(D) $E(\hat{\theta})\neq\theta$，$D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】B

【解析】因为X,Y是二维正态分布，所以$\overline{X}$与$\overline{Y}$也服从二维正态分布，则$\overline{X}-\overline{Y}$也服从二维正态分布，即$E(\hat{\theta})=E(\overline{X}-\overline{Y})=E(\overline{X})-E(\overline{Y})=\mu_1-\mu_2=\theta$，

$D(\hat{\theta})=D(\overline{X}-\overline{Y})=D(\overline{X})+D(\overline{Y})-\operatorname{cov}(\overline{X},\overline{Y})=\dfrac{\sigma_1{}^2+\sigma_2{}^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$，故正确答案为 B.

(10)设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\dfrac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\dfrac{1+\theta}{4}$，利用来自总体的样本值 1，3，2，2，1，3，1，2，可得θ的最大似然估计值为

(A)$\dfrac{1}{4}$.　　(B)$\dfrac{3}{8}$.　　(C)$\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{5}{2}$.

【答案】A.

【解析】似然函数$L(\theta)=(\dfrac{1-\theta}{2})^3(\dfrac{1+\theta}{4})^5$，

取对数$\ln L(\theta)=3\ln(\dfrac{1-\theta}{2})+5\ln(\dfrac{1+\theta}{4})$；

求导$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{3}{1-\theta}+\dfrac{5}{1+\theta}=0$，得$\theta=\dfrac{1}{4}$.故正确答案为 A.

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.请将答案写在答题纸指定位置上.）

(11)若$y=\cos e^{-\sqrt{x}}$，则$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=$______________.

【答案】$\dfrac{\sin\frac{1}{e}}{2e}$.

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=-\sin e^{-\sqrt{x}}(e^{-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{-2\sqrt{x}})$ $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=1}=\dfrac{\sin\frac{1}{e}}{2e}$.

(12)$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{5}\frac{x}{\sqrt{|x^2-9|}}dx=$ ______________.

【答案】6.

【解析】$\displaystyle\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx+\int_{3}^{5}\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}dx=\frac{-1}{2}\int_{\sqrt{5}}^{3}\frac{d(9-x^2)}{9-x^2}+\frac{1}{2}\int_{3}^{5}\frac{d(x^2-9)}{\sqrt{x^2-9}}=6$.

(13)设平面区域D由曲线$y=\sqrt{x}\cdot\sin\pi x\,(0\le x\le 1)$与$x$轴围成,则$D$绕$x$轴旋转所成旋转体的体积为______________.

【答案】$\dfrac{\pi}{4}$.

【解析】$V=\pi\int_0^1(\sqrt{x}\sin\pi x)^2dx=\pi\int_0^1 x\sin^2\pi x dx \underline{\underline{\pi x=t}} \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 t dt=\frac{\pi}{4}$.

(14)差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为______________.

【答案】$y=y^*+\bar{y}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$ 为任意常数.

【解析】$\bar{y}=C$，$y^*=\frac{1}{2}(at+b)$，$(t+1)(a(t+1)+b)-t(at+1)=t$，$2at+a+b=t$，$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$，

$y=y^*+\bar{y}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t+C$，$C$ 为任意常数.

(15)多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 项的系数为______________.

【答案】-5.

【解析】

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 2x \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 2 & -1 & 1 & x \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix}-x\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & x & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix}-2x\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & x \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

所以展开式中含 x^3 项的有 $-x^3,-4x^3$，即 x^3 项的系数为-5.

(16)甲乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X，Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数______________.

【答案】$\frac{1}{5}$.

【解答】联合分布率 $(X,Y)\sim\begin{pmatrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$，$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{20}$，$DX=\frac{1}{4}, DY=\frac{1}{4}$，即 $\rho_{XY}=\frac{1}{5}$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

(17)(本小题满分 10 分)

已知 $\lim\limits_{x\to 0}[\alpha\arctan\frac{1}{x}+\left(1+|x|\right)^{\frac{1}{x}}]$ 存在，求 α 的值.

【答案】$\alpha=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$.

【解析】.要想极限存在，则左右极限相等；

又由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=\frac{\pi}{2}\alpha+e$;

$$\lim_{x\to0^-}\left[\alpha\arctan\frac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]=-\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{e};$$

从而 $\frac{\pi}{2}\alpha+e=-\frac{\pi}{2}\alpha+\frac{1}{e}$，即 $\alpha=\frac{1}{\pi}(\frac{1}{e}-e)$.

(18)(本小题满分 12 分)

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

【答案】$(-1,0)$ 处取极小值 2；$(\frac{1}{2},0)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln2$.

【解析】

（1）$\begin{cases} f_x'=\dfrac{2x^2+x-1-y^2}{x^3}=0 \\ f_y'=\dfrac{y}{x^2}=0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x^2+x-1-y^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

得驻点 $(-1,0)$，$(\frac{1}{2},0)$

（2）$\begin{cases} f_{xx}''=\dfrac{(4x+1)x-3(2x^2+x-1-y^2)}{x^4} \\ f_{xy}''=\dfrac{-2y}{x^3} \\ f_{yy}''=\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$

（3）驻点 $(-1,0)$ 处，A=3，B=0，C=1，$AC-B^2=3>0$，$A>0$

故 $f(x,y)$ 在 $(-1,0)$ 处取极小值 2；

驻点 $(\frac{1}{2},0)$ 处，A=24，B=0，C=4，$AC-B^2=3>0$，$A>0$

故 $f(x,y)$ 在 $(\frac{1}{2},0)$ 处取极小值 $\frac{1}{2}-2\ln2$.

(19)(本小题满分 12 分)

设有界区域 D 是 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围城的部分，计算二重积分 $\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)dxdy.$

【答案】$\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}$.

$$\iint\limits_D e^{(x+y)^2}(x^2-y^2)d\sigma=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^2dr^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta\int_0^1 e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}r^2dr^2$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta d\theta\int_0^1 e^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}udu$$

$$\int_0^1 ue^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}du=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^1(\cos\theta+\sin\theta)^2ue^{u(\cos\theta+\sin\theta)^2}du(\cos\theta+\sin\theta)^2$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}\int_0^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}te^tdt$$

$$=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^4}[e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1]$$

$\therefore$ 上式$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta-\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^3}[e^{(\cos\theta+\sin\theta)^2}-1]d\theta$

$=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}du-\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}-1}{u^3}du$

其中$\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{u}e^{u^2}du=\int_1^{\sqrt{2}}u^{-2}d(\frac{1}{2}e^{u^2})=\frac{1}{2u^2}e^{u^2}\Big|_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}}(\frac{1}{2}e^{u^2})(-2u^{-3})du=\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{2}e+\int_1^{\sqrt{2}}\frac{e^{u^2}}{u^3}du$

$\therefore$ 原式$=\frac{e^2}{8}-\frac{e}{4}+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}u^{-3}du=\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}$.

(20)(本小题满分 12 分)

设n为正整数，$y=y_n(x)$是微分方程$xy'-(n+1)y=0$满足条件$y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$的解.

(1)求$y_n(x)$；

(2)求级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)$的收敛域及和函数.

【答案】(1) $y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$;(2)收敛域$[-1,1]$，$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, x\in(-1,1)\\ 1, x=1\end{cases}$.

(1) $y'-\frac{(n+1)y}{x}=0$ 得 $y=Ce^{\int\frac{n+1}{x}dx}=Cx^{n+1}$，将 $y_n(1)=\frac{1}{n(n+1)}$ 带入，有 $C=\frac{1}{n(n+1)}$，$y_n(x)=\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$ 的收敛域为$[-1,1]$

设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=(1-x)\ln(1-x)+x, x\in(-1,1)$

又因为$S(x)$在$[-1,1]$连续，所以$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=1$，

所以$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, x\in[-1,1)\\ 1, x=1\end{cases}$.

(21)(本小题满分 12 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\1&a&b\end{pmatrix}$仅有两个不同的特征值. 若$A$相似于对角矩阵，求$a$，$b$的值，并求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵.

【解析】由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\-1&-a&\lambda-b\end{vmatrix}=(\lambda-b)(\lambda-3)(\lambda-1)=0$

当$b=3$时，由A相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，则$(3E-A)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}$知，$a=-1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=3$ 所对应特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=1$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&&\\&3&\\&&1\end{pmatrix}$

当 $b=1$ 时，由 A 相似对角化可知，二重根所对应特征值至少存在两个线性无关的特征向量，则 $(E-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\-1&-a&0\end{pmatrix}$，知 $a=1$，

此时，$\lambda_1=\lambda_2=1$ 所对应特征向量为 $\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

$\lambda_3=3$ 所对应的特征向量为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

(22)(本小题满分 12 分)

在区间 $(0,2)$ 上随机取一点，将该区间分成两段，较短的一段长度记为 X ,较长的一段长度记为 Y ,令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1)求 X 的概率密度;

(2)求 Z 的概率密度.

(3)求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

【答案】(1) $x\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$；(2) $f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2},z\ge1\\0,其他\end{cases}$.(3) $-1+2\ln2$.

【解析】(1)由题知：$x\sim f(x)=\begin{cases}1,0<x<1\\0,其他\end{cases}$；

(2)由 $y=2-x$，即 $Z=\dfrac{2-X}{X}$，先求 Z 的分布函数：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\frac{2-X}{X}\le z\right\}=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}$$

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\ge1$ 时，

$$F_Z(z)=P\left\{\frac{2}{X}-1\le z\right\}=1-P\left\{X\le\frac{2}{z+1}\right\}=1-\int_0^{\frac{2}{z+1}}1dx=1-\frac{2}{z+1};$$

$$f_Z(z)=(F_Z(z))'=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2},z\ge1\\0,其他\end{cases};$$

(3) $E\left(\frac{X}{Y}\right)=E\left(\frac{X}{2-X}\right)=\int_0^1 \frac{x}{2-x}\cdot 1dx=-1+2\ln 2$.