2020 全国硕士研究生入学统一考试数学二试题详解

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小量中最高阶是（　　）

（A）$\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt$　　（B）$\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^2}\right)dt$

（C）$\int_0^{\sin x}\sin t^2dt$　　（D）$\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}dt$

【答案】（D）

【解析】由于选项都是变限积分，所以导数的无穷小量的阶数比较与函数的比较是相同的。

（A）$\left(\int_0^x\left(e^{t^2}-1\right)dt\right)'=e^{x^2}-1\sim x^2$

（B）$\left(\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^2}\right)dt\right)'=\ln\left(1+\sqrt{x^2}\right)\sim|x|$

（C）$\left(\int_0^{\sin x}\sin t^2dt\right)'=\sin\left(\sin^2 x\right)\sim x^2$

（D）$\left(\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin t^2}dt\right)'=\sqrt{\sin(1-\cos x)^2}\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$

经比较，选（D）

（2）函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为　　（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（C）

【解析】由题设，函数的可能间断点有 $x=-1,0,1,2$，由此

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=-\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{3(e^{-1}-1)}\lim_{x\to-1}\ln|1+x|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=-\frac{e^{-1}}{2}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{1}{2e};$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\frac{\ln2}{1-e}\lim_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0;$$

;

$$\lim_{x\to1^+}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\frac{\ln2}{1-e}\lim_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\frac{e\ln3}{(e^2-1)}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}=\infty$$

故函数的第二类间断点（无穷间断点）有 3 个，故选项（C）正确。

（3） $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$ （　　）

（A） $\frac{\pi^2}{4}$　　（B） $\frac{\pi^2}{8}$　　（C） $\frac{\pi}{4}$　　（D） $\frac{\pi}{8}$

【答案】（A）

【解析】令 $\sqrt{x}=\sin t$，则 $x=\sin^2 t$， $dx=2\sin t\cos tdt$

$$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t\cos t}2\sin t\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2tdt=t^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}$$

（4） $f(x)=x^2\ln(1-x),n\geq3$时， $f^{(n)}(0)=$

（A） $-\frac{n!}{n-2}$　　（B） $\frac{n!}{n-2}$　　（C） $-\frac{(n-2)!}{n}$　　（D） $\frac{(n-2)!}{n}$

【答案】(A)

【解析】由泰勒展开式， $\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则 $x^2\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n-2}$，

故 $f^{(n)}(0)=\frac{n!}{n-2}$.

（5）关于函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy,xy\neq0\\x,\quad y=0\\y,\quad x=0\end{cases}$ 给出以下结论

① $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=1$ ② $\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=1$ ③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ ④ $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$

正确的个数是

（A）4　　（B）3　　（C）2　　（D）1

【答案】（B）

【解析】$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1$，①正确

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}-1}{y},$$

而$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xy-y}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-1}{x}\cdot y$ 不存在，所以②错误；

$|xy-0|=|x||y|,|x-0|=|x|,|y-0|=|y|$，从而$(x,y)\to(0,0)$时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，

③正确。

$\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\begin{cases}0, & xy\neq 0\text{或}y=0\\ y, & x=0\end{cases}$，从而$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$，④正确

（6）设函数$f(x)$在区间$[-2,2]$上可导，且$f'(x)>f(x)>0$.则

(A) $\frac{f(-2)}{f(-1)}>1$　　(B) $\frac{f(0)}{f(-1)}>e$　　(C) $\frac{f(1)}{f(-1)}<e^2$　　(D) $\frac{f(2)}{f(-1)}<e^3$

【答案】(B)

【解析】构造辅助函数$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，由$F'(x)=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，由题意可知，$F'(x)>0$，从而$F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$单调递增.故$F(0)>F(-1)$，也即$\frac{f(0)}{e^0}>\frac{f(-1)}{e^{-1}}$，又有$f(x)>0$，从而$\frac{f(0)}{f(-1)}>e$.故选(B).

（7）设4阶矩阵$A=(a_{ij})$不可逆，a_{12}的代数余子式$A_{12}\neq 0$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$为矩阵$A$的列向量组，$A^*$为$A$的伴随矩阵，则$A^*x=0$的通解为（　　）

（A）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

（B）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

（C）$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

（D）$x=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，其中$k_1,k_2,k_3$为任意常数

【答案】（C）

【解析】由于A不可逆，故$r(A)<4$，$|A|=0$.由$A_{12}\neq 0\Rightarrow r(A^*)\geq 1$，$r(A)\geq 4-1=3$，则$r(A)=3$，$r(A^*)=1$，故$A^*x=0$的基础解系中有$4-1=3$个无关解向量。

此外，$A^*A=|A|E=0$，则A的列向量为$A^*x=0$的解。则由$A_{12}\neq 0$，可知$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性无关（向量组无关，则其延伸组无关），故$A^*x=0$的通解为$x=k_1\alpha_1+k_2\alpha_3+k_3\alpha_4$，即选项（C）正确。

（8）设A为3阶矩阵，α_1,α_2为A的属于特征值1的线性无关的特征向量，α_3为A的属于特征值-1的特征向量，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$的可逆矩阵$P$为（　）

（A）$(\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2,-\alpha_3)$　　（B）$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,-\alpha_3)$

（C）$(\alpha_1+\alpha_3,-\alpha_3,\alpha_2)$　　（D）$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$

【答案】（D）

【解析】设$P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，若$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则$\beta_1,\beta_3$应为 A 的属于特征值 1 的线性无关的特征向量，β_2应为 A 的属于特征值-1的线性无关的特征向量。

这里根据题设，α_1,α_2为A的属于特征值为1的线性无关的特征向量，则$\alpha_1+\alpha_2$也为A的属于特征值为1的线性无关的特征向量。又因α_3为A的属于-1的特征向量，则$-\alpha_3$也为A的属于特征值-1的特征向量。且

$(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$,由于$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$可逆，

故$r(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$,即$\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2$线性无关

综上，若 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_3,\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

因此选项（D）正确。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\end{cases}$，则 $\left.\dfrac{d^2y}{d^2x}\right|_{t=1}=$ ________

【答案】$-\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{t}=\dfrac{1}{t}$

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}=-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$

$$\left.\frac{d^2y}{d^2x}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$$

(10) $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1\sqrt{x^3+1}dx=$ ________

【答案】$\dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

【解析】交换积分次序，原式

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\sqrt{x^3+1}dy=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}dx$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{x^3+1}d\left(x^3+1\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

(11)设 $z=\arctan\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]$，则 $dz\big|_{(0,\pi)}=$ ________

【答案】$\left(\pi-1\right)dx-dy$

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y+\cos\left(x+y\right)}{1+\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x+\cos\left(x+y\right)}{1+\left[xy+\sin\left(x+y\right)\right]^2}$

将$\left(0,\pi\right)$带入得$\frac{\partial z}{\partial x}=\pi-1,\frac{\partial z}{\partial y}=-1$

因此$dz\Big|_{(0,\pi)}=\left(\pi-1\right)dx-dy$

(12)斜边长为$2a$的等腰直角三角形平板，铅直的沉没在水中，且斜边与水面相齐，记重力加速度为g，水的密度为ρ，则该平板一侧所受的水压力为________.

【答案】$\frac{1}{3}\rho ga^3$

【解析】以水面向右为x轴，以垂直于三角板斜边向上为y轴建立直角坐标系，则此时，三角板右斜边所在的直线方程为$y=x-a$，取微元dy，则此时

$$dF=-y2x\rho gdy=-2\rho gy(y+a)dy,$$

则一侧的压力$F=\int_{-a}^{0}-2\rho gy(y+a)dy=\rho g(-\frac{2}{3}y^3-ay^2)\Big|_{-a}^{0}=\frac{1}{3}\rho ga^3$.

（13）设$y=y\left(x\right)$满足$y''+2y'+y=0$，且$y\left(0\right)=0,y'\left(0\right)=1$，则$\int_0^{+\infty}y\left(x\right)dx=$_____

【答案】1

【解析】由方程可得特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0,$则特征方程的根为$\lambda_1=-1,\lambda_2=-1,$

则微分方程的通解为$y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$，由$y\left(0\right)=0,y'\left(0\right)=1$可得$c_1=0,c_2=1$，则$y\left(x\right)=xe^{-x}$，则$\int_0^{+\infty}y\left(x\right)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$

（14）行列式$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=$_______

【答案】a^4-4a^2

【解析】

$$\begin{vmatrix}a&0&-1&1\\0&a&1&-1\\-1&1&a&0\\1&-1&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&a\\-1&0&a\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&a&0\\-1&1&a\\1&-1&a\end{vmatrix}$$

$$=-a\begin{vmatrix}1&a^2\\a&2a\end{vmatrix}-2a\begin{vmatrix}0&a\\-1&1\end{vmatrix}=-a\left(2a-a^3\right)-2a^2$$

$$=a^4-4a^2$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\left(x>0\right)$ 的斜渐近线

【答案】$y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{2e}$

【解析】由 $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^x}{(1+x)^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{x})^x}=\dfrac{1}{e}$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-\frac{1}{e}x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{1}{e}x)=\lim_{x\to+\infty}x(e^{x\ln\frac{x}{1+x}}-\frac{1}{e})=e^{-1}\lim_{x\to+\infty}x(e^{x\ln\frac{x}{1+x}+1}-1)$$

$$=e^{-1}\lim_{x\to+\infty}x(x\ln\frac{x}{1+x}+1)\ \underline{\underline{\frac{1}{x}=t}}\ e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{1+t}+t}{t^2}\ \underline{\underline{洛}}\ e^{-1}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2e}.$$

故斜渐近线方程为：$y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{2e}$.

（16）（本题满分 10 分）

已知函数 $f\left(x\right)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=1$，$g\left(x\right)=\int_0^1 f\left(xt\right)dt$，求 $g'\left(x\right)$ 并证明 $g'\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续.

【答案】
$$g'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & x=0\\ \dfrac{f(x)}{x}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f\left(u\right)du & x\neq0\end{cases}$$

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=1$，并且 $f(x)$ 连续，可得 $f(0)=0, f'(0)=1$.

$g\left(x\right)=\int_0^1 f\left(xt\right)dt\ \underline{\underline{xt=u}}=\dfrac{1}{x}\int_0^x f\left(u\right)du$，当 $x=0$ 时，$g(0)=0$.故

$$g\left(x\right)=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x f\left(u\right)du & x\neq0\end{cases},$$

又

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}\underline{\underline{\text{导数定义}}}\frac{1}{2}$$

则 $g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0\\ \frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du & x\neq 0\end{cases}$，又因为

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=g'(0)$$

所以 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

（17）（本题满分 10 分）

求 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 极值

【答案】$f_{极小}(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$

【解析】令 $\begin{cases}f_x'(x,y)=3x^2-y=0\\ f_y'(x,y)=24y^2-x=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\ y=\frac{1}{12}\end{cases}$.

当驻点为 $(0,0)$ 时，$\begin{cases}A=f_{xx}''(0,0)=0\\ B=f_{xy}''(0,0)=-1\\ C=f_{yy}''(0,0)=0\end{cases}$，则 $AC-B^2<0$，故 $(0,0)$ 不是极值点.

当驻点为 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 时，$\begin{cases}A=f_{xx}''(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=1\\ B=f_{xy}''(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-1\\ C=f_{yy}''(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=4\end{cases}$，则 $AC-B^2>0, A=1>0$，故 $(\frac{1}{6},\frac{1}{12})$ 为极

小值点. $f(\frac{1}{6},\frac{1}{12})=-\frac{1}{216}$ 为极小值.

（18）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$.求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x),y=\frac{1}{2},y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

【答案】$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\frac{\pi^2}{6}$

【解析】$\begin{cases} 2f(x)+x^2f(\frac{1}{x})=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}} \\ 2f(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{\frac{1}{x}+2}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$ 得 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$V_x=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi yxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\pi\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}dy\underline{\underline{y=\sin t}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}2\pi\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos tdt=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=\pi(t-\frac{1}{2}\sin t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi^2}{6}.$$

（19）（本题满分 10 分）

平面 D 由直线 $x=1,x=2,y=x$ 与 x 轴围成，计算 $\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy$

【答案】$\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

【解析】

$$\iint\limits_D\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta}\frac{r}{r\cos\theta}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\sec^2\theta d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^3\theta d\theta=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta d\tan\theta=\frac{3}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

（20）（本题满分 11 分）

设函数 $f\left(x\right)=\int_1^x e^{t^2}dt$

(I) 证明：存在 $\xi\in\left(1,2\right),f\left(\xi\right)=\left(2-\xi\right)e^{\xi^2}$

(II) 证明：存在 $\eta\in\left(1,2\right),f\left(2\right)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$

【解析】(I)

法 1：令 $F(x)=(x-2)f(x)=(x-2)\int_1^x e^{t^2}dt$.

由题意可知，$F(2)=F(1)=0$，且 $F(x)$ 可导，由罗尔中值定理知，$\exists\xi\in(1,2)$，使

$F'(\xi)=0$，又 $F'(x)=\int_1^x e^{t^2}dt+(x-2)e^{x^2}$，即 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$.得证.

法 2：令 $F(x)=f(x)+(x-2)e^{x^2}$，则 $F(1)=-e<0,F(2)=\int_1^2 e^{t^2}dt>0$，由零点定理知，

存在 $\xi\in(1,2)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=(2-\xi)e^{\xi^2}$.

(II)令 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}\neq 0$.

由柯西中值定理知，存在 $\eta\in(1,2)$，使得 $\dfrac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\dfrac{f'(\eta)}{g'(\eta)}$，

即 $\dfrac{f(2)}{\ln 2}=\dfrac{e^{\eta^2}}{\dfrac{1}{\eta}}$，故 $f(2)=\ln 2\cdot\eta e^{\eta^2}$.

（21）（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)>0$，曲线 $y=f(x)(x\geq 0)$ 经过坐标原点，其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T ,又 MP 垂直 x 轴于点 P，已知曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴围成图形的面积与 ΔMTP 面积比恒为为 3:2，求满足上述条件的曲线方程。

【答案】 $y=Cx^3\ (C>0)$

【解析】设切点 $M(x,y)$，则过 M 点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$.

令 $Y=0$，则 $X=x-\dfrac{y}{y'}$，故 $T\left(x-\dfrac{y}{y'},0\right)$.

曲线 $y=f(x)$，直线 MP 以及 x 轴围成图形的面积 $S_1=\int_0^x y(t)dt$，

ΔMTP 的面积 $S_2=\dfrac{1}{2}y\left[x-\left(x-\dfrac{y}{y'}\right)\right]=\dfrac{y^2}{2y'}$

因 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$，则 $\dfrac{\int_0^x y(t)dt}{\dfrac{y^2}{2y'}}=\dfrac{3}{2}$，即 $\int_0^x y(t)dt=\dfrac{3}{4}\dfrac{y^2}{y'}$，①

方程①两边同时求导，得：$y=\frac{3}{4}\frac{2y(y')^2-y^2y''}{(y')^2}$，整理得：$3yy''=2(y')^2$，②

令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{dp}{dy}$，代入②，得 $3yp\frac{dp}{dy}=2p^2$，解得 $p=C_1y^{\frac{2}{3}}$，即 $\frac{dy}{dx}=C_1y^{\frac{2}{3}}$

从而解得 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$.

因曲线过原点，即 $f(0)=0$，则 $C_2=0$，故 $y=Cx^3$.

又因为 $f'(x)>0$，所以 $y=f(x)$ 单调递增，所以 $C>0$

即曲线为 $y=Cx^3\,(C>0)$

（22）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_1x_3+2ax_2x_3$ 经过可逆线性变换

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化为二次型 $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$.

(I)求 a 的值；

(II)求可逆矩阵 P.

【答案】（1）$a=-\frac{1}{2}$；（2）$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \frac{2}{\sqrt{3}}\\0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}}\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

【解析】（1）根据题设，$f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX$，$A=\begin{bmatrix}1 & a & a\\a & 1 & a\\a & a & 1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经可逆变换得到 $g(y_1,y_2,y_3)$，故它们的正负惯性指数相同。由于

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$$

的正负惯性指数分别为 $p=2,q=0$，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的也分别为 $p=2,q=0$.

故矩阵 A 有特征值为 0，即 $|A|=0\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$ 或 1。

当 $a=1$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2$，其正负惯性指数分别为 $p=1,q=0$，与题设矛盾，故 $a=1$ 舍。因此 $a=-\frac{1}{2}$ 符合题意。

（2）当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3\\&=(x_1^2-x_1x_2-x_1x_3)+x_2^2+x_3^2-x_2x_3\\&=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2+\frac{3}{4}x_3^2-\frac{3}{2}x_2x_3\\&=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2-x_3\right)^2\end{aligned}$$

令 $z_1=x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3,z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x_2-x_3\right),z_3=x_3$，则 $f\ \underline{\underline{\ z=P_1x\ }}\ z_1^2+z_2^2$

其中 $P_1=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}$.

对于 $g(y_1,y_2,y_3)=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$，令 $z_1=y_1+y_2,z_2=2y_3,z_3=y_2$，则

$f\ \underline{\underline{\ z=P_2y\ }}\ z_1^2+z_2^2$，其中 $P_2=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$.

由 $P_1X=P_2Y$ 可得 $X=P_1^{-1}P_2Y$, 令 $P=P_1^{-1}P_2$, 则 $P=\begin{bmatrix}1&2&\frac{2}{\sqrt{3}}\\0&1&\frac{4}{\sqrt{3}}\\0&1&0\end{bmatrix}$ 为所求的可逆矩阵

（23）（本题满分 11 分）

设 A 为 2 阶矩阵，$P\left(\alpha,A\alpha\right)$，其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量

（1）证明 P 为可逆矩阵；

（2）若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$，求 $P^{-1}AP$，并判断 A 是否相似于对角矩阵。

【答案】（2）$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$A$ 可以相似对角化

【解析】(1) 证明：设 $k_1\alpha + k_2A\alpha = 0$ ①，k_2 肯定为 0，反证法，若 $k_2 \neq 0$，则 $A\alpha = -\dfrac{k_1}{k_2}\alpha$，

即 α 为 A 的特征向量，与题意矛盾。因此 $k_2 = 0$，代入①得 $k_1\alpha = 0$，由 α 非零得 $k_1 = 0$.

由 $k_1 = k_2 = 0$ 得 $\alpha, A\alpha$ 线性无关，向量组秩为 2，$r(P) = 2$，所以 $P = (\alpha, A\alpha)$ 可逆。

（2）由 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$ 得 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$，

$$A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha) = (\alpha, A\alpha)\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

由 P 可逆得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，令 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 由 $|B - \lambda E| = 0$ 得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$

有两个不同的特征值，所以 B 可相似于对角矩阵，由 $P^{-1}AP = B$，$A \sim B$

因为 B 可对角化，A 相似于 B，所以 A 可对角化，即 A 相似于对角矩阵.