2021 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题：1—10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　）.

（A）连续且取极大值.（B）连续且取极小值.（C）可导且导数为0.（D）可导且导数不为0.

【答案】（D）

【解析】根据题设，由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

又因

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\frac{1}{2},$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且导数不为 0，即选项（D）为正确选项。

（2）设函数 $f(x,y)$ 可微，且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$，$f(x,x^2)=2x^2\ln x$，则 $df(1,1)=$（　　）

（A）$dx+dy$.　　（B）$dx-dy$.　　（C）dy.　　（D）$-dy$.

【答案】（C）

【解析】根据题设，对方程 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两边关于变量 x 求导，可得

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)\cdot e^x=(x+1)(3x+1). \qquad ①$$

对方程 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两边关于变量 x 求导，可得

$$f_1'(x,x^2)+f_2'(x,x^2)\cdot 2x=4x\ln x+2x. \qquad ②$$

若将 $x=0$ 代入①式，将 $x=1$ 代入②式，则可得

$$\begin{cases}f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1\\ f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2\end{cases}.$$

由此解出 $f_1'(1,1)=0$，$f_2'(1,1)=1$，于是 $df(1,1)=f_1'(1,1)dx+f_2'(1,1)dy=dy$.

因此，选项（C）为正确选项.

（3）设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　　）

（A） $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.　　　　（B） $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

（B） $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$.　　　　（D） $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

【答案】（A）

【解析】根据题设，$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}=ax+bx^2+cx^3+o(x^3)$，所以

$$\sin x=(1+x^2)(ax+bx^2+cx^3+o(x^3)),$$

则

$$\sin x=ax+bx^2+(a+c)x^3+o(x^3),$$

又因 $\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$，故由 $a=1,b=0,a+c=-\dfrac{1}{6}$，可得 $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.

因此，选项（A）为正确选项。

（4）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续,则 $\int_0^1 f(x)dx=$（　　）

（A） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$.　　　　（B） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.

（C） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$.　　　　（D） $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$.

【答案】（B）

【解析】根据题设，由定积分定义知

$$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\frac{1}{n}.$$

其中 $\xi_k\in\left[\dfrac{k}{n},\dfrac{k+1}{n}\right]$，$\dfrac{k}{n}<\dfrac{2k-1}{2n}<\dfrac{k+1}{n}$，故选项（B）为正确选项.

（5）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2-(x_3-x_1)^2$ 的正惯性指数与负惯性指数依次为（　　）.

（A）2；0.　　（B）1；1.　　（C）2；1.　　（D）1；2.

【答案】（B）

【解析】根据题设，由拉格朗日配方法，可得

$$
\begin{aligned}
f &= 2x_2^{2} + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3 \\
&= 2(x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3) + 2x_1x_3 \\
&= 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + x_1x_3 \\
&= 2\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 .
\end{aligned}
$$

令 $y_1 = x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3, y_2 = x_1 - x_3$，则

$$
f \ \underline{\underline{y=Cx}}\ 2y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

因此，所求二次型的正惯性指数与负惯性指数分别为 1 和 1，即选项（B）为正确选项。

（6）已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，记 $\beta_1 = \alpha_1$，$\beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1$，$\beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$，若 β_1，β_2，β_3 两两正交，则 l_1，l_2 依次为（　　）

（A）$\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　　（B）$-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.　　（C）$\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.　　（D）$-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

【答案】（A）

【解析】根据题设，由施密特正交化法可知

$$
\beta_1 = \alpha_1，\ \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1，\ \beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2 .
$$

于是，$k = \dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} = \dfrac{2}{2} = 1, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

所以

$$l_1=\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}=\frac{5}{2},l_2=\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

因此，选项（A）为正确选项.

（7）设 A、B 为 n 阶实对称，下列不成立的是（　　）

（A）$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

（B）$r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

（C）$r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

（D）$r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=2r(A)$.

【答案】（C）

【解析】根据题设，对于选项（A），由于$r\begin{pmatrix}A & O\\ O & AA^T\end{pmatrix}=r(A)+r(AA^T)=2r(A)$，故选项（A）为真命题。

对于选项（B），由于 AB 的列向量可由 A 的列向量线性表示，故由

$$r\begin{pmatrix}A & AB\\ O & A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^T\end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A),$$

可知选项（B）也为真命题。

对于选项（C），若 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则 $BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，且 $r(A)=1$，

但$r\begin{pmatrix}A & BA\\ O & AA^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=3\neq 2r(A)$，故选项（C）为假命题。

对于选项（D），由于 BA 的行向量可由 A 的行向量线性表示，故由

$$r\begin{pmatrix}A & O\\ BA & A^T\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A & O\\ O & A^T\end{pmatrix}=r(A)+r(A^T)=2r(A),$$

可知选项（D）为真命题。

综上可知，由于本题要找不成立的选项，故选项（C）为正确选项。

（8）（8）设 A,B 为随机事件，且 $0<P(B)<1$，下列命题中为假命题的是（　　）.

（A）若 $P(A|B)=P(A)$，则 $P(A|\overline{B})=P(A)$.

（B）若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.

（C）若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则 $P(A|B)>P(A)$.

（D）若 $P(A|A\cup B)>P(\overline{A}|A\cup B)$，则 $P(A)>P(B)$.

【答案】（D）

【解析】根据题设，则

对于选项（A），若 $P(A|B)=P(A)$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=P(A)$，可得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A,B 为相互独立的事件，故 $P(A|\overline{B})=P(A)$.因此，选项（A）为真命题。

对于选项（B），若 $P(A|B)>P(A)$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$，可得 $P(AB)>P(A)P(B)$.

于是，由

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}|\overline{B})-P(\overline{A})&=\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}-\frac{P(\overline{A})P(\overline{B})}{P(\overline{B})}\\
&=\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)-\left[1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)\right]}{P(\overline{B})}\\
&=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(\overline{B})}>0,
\end{aligned}
$$

可知 $P(\overline{A}|\overline{B})>P(\overline{A})$.因此，选项（B）为真命题。

对于选项（C），若 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$，则由 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$，可得

$$P(AB)\left[1-P(B)\right]>\left[P(A)-P(AB)\right]P(B),$$

即 $P(AB)>P(A)P(B)$.

于是，由 $P(A|B)-P(A)=\dfrac{P(AB)-P(A)P(B)}{P(B)}>0$，可知 $P(A|B)>P(A)$.因此，选项（C）为真命题。

对于选项（D），若 $P(A|A\cup B)>P(\bar{A}|A\cup B)$，则由 $\dfrac{P(A)}{P(A\cup B)}>\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(A\cup B)}$，可得

$$P(A)>P(\bar{A}B)\text{，即 }P(A)>P(B)-P(AB)\text{，}$$

显然，由 $P(A)>P(B)-P(AB)$ 并不能推导出 $P(A)>P(B)$，故选项（D）为假命题，符合题意。

综上可知，选项（D）为正确选项。

(9) 设 $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$ 为来自总体 $N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$ 的简单随机样本，令

$$\theta=\mu_1-\mu_2,\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n}Y_i,\hat{\theta}=\bar{X}-\bar{Y}\text{，}$$

则（　）.

（A）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　（B）$E(\hat{\theta})=\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

（C）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{n}$.　　（D）$E(\hat{\theta})\neq\theta,D(\hat{\theta})=\dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}$.

【答案】（B）

【解析】根据题设，由于 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

于是，$\bar{X}\sim N\left(\mu_1,\dfrac{\sigma_1^2}{n}\right),\bar{Y}\sim N\left(\mu_2,\dfrac{\sigma_2^2}{n}\right)$，从而，

$$E(\hat{\theta})=E(\bar{X}-\bar{Y})=E\bar{X}-E\bar{Y}=\mu_1-\mu_2=\theta\text{，}$$

$$\begin{aligned}D(\hat{\theta})&=D(\bar{X}-\bar{Y})=D\bar{X}+D\bar{Y}-2\operatorname{cov}(\bar{X},\bar{Y})\\&=D\bar{X}+D\bar{Y}-2\rho\sqrt{D\bar{X}}\sqrt{D\bar{Y}}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}{n}.\end{aligned}$$

综上可知，故选项（B）为正确选项。

（10）设 $X_1,X_2,\ldots,X_{16}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，考虑假设检验问题：H_0：$\mu\le 10$，

H_1: $\mu > 10$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，若该检验问题的拒绝域为 $W=\{\overline{X}\geq 11\}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}X_i$，则 $\mu=11.5$ 时，该检验犯第二类错误的概率为（　　）

（A）$1-\Phi(0.5)$.　　（B）$1-\Phi(1)$.　　（C）$1-\Phi(1.5)$.　　（D）$1-\Phi(2)$

【答案】（B）

【解析】根据题设，由于 $X\sim N(\mu,4)$，则 $\overline{X}\sim N\left(11.5,\frac{1}{4}\right)$.

又因检验犯第二类错误的概率为受伪概率，故所求的概率为

$$p=P(\text{接受}H_0\,|H_1\text{为真})=P\{\overline{X}\in\overline{W}\}$$
$$=P\{\overline{X}<11\}=P\left\{\frac{\overline{X}-11.5}{\frac{1}{2}}<\frac{11-11.5}{\frac{1}{2}}\right\}=1-\Phi(1)$$

因此，选项（B）为正确选项.

二、填空题：11–16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$______.

【答案】$\frac{\pi}{4}$

【解析】$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

(12) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2e^t+t+1\\ y=4(t-1)e^t+t^2\end{cases}$ 确定,则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$______

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】根据题设，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4te^t+2t}{2e^t+1},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(4e^t+4te^t+2)(2e^t+1)-(4te^t+2t)2e^t}{(2e^t+1)^3},$$

将$t=0$代入，则可得$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\dfrac{2}{3}$.

（13）欧拉方程$x^2y''+xy'-4y=0$满足$y(1)=1,y'(1)=2$的解为$y=$__________.

【答案】x^2

【解析】令$x=e^t$，则$xy'=\dfrac{dy}{dt}$，$x^2y''=\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}$.于是原方程化为$\dfrac{d^2y}{dt^2}-4y=0$.

特征方程为$r^2-4=0$，则特征值为$r_1=2,r_2=-2$，

于是可知该线性齐次方程的通解为$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}=C_1x^2+C_2x^{-2}$.

将初始条件$y(1)=1,y'(1)=2$带入可知$C_1=1,C_2=0$,故满足条件的特解为$y=x^2$.

（14）设Σ为空间曲线区域$\left\{(x,y,z)\middle|x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\right\}$表面的外侧，则曲面积分

$\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy=$________.

【答案】4π.

【解析】根据题设，由高斯公式可知，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+zdxdy&=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dv\\&=\iiint\limits_{\Omega}1dv=\int_0^2dz\iint\limits_{D}dxdy=4\pi.\end{aligned}$$

（15）设$A=\{a_{ij}\}$为3阶矩阵，A_{ij}为代数余子式，若A的每行元素之和均为2，且$|A|=3$，则

$A_{11}+A_{21}+A_{31}=$__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解法一】根据题设，由于A的每行元素之和均为2，则$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故$A$的特征值和特征向量分

别为$\lambda=2$，$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

于是，A^* 的特征值为 $\dfrac{|A|}{\lambda}$，其对应的特征向量为

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}，\text{即 } A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

又因 A_{11},A_{21},A_{31} 为 A^* 的第一行元素，故 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{3}{2}$.

【解法二】根据行列式展开定理，可知

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}=\begin{vmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\1 & a_{22} & a_{23}\\1 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & a_{12} & a_{13}\\2 & a_{22} & a_{23}\\2 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

又因

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{12} & a_{13}\\a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{22} & a_{23}\\a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & a_{12} & a_{13}\\2 & a_{22} & a_{23}\\2 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

故 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\dfrac{1}{2}|A|=\dfrac{3}{2}$.

（16）甲，乙两个盒子中各装有 2 个红球和 2 个白球，先从甲盒中任取一球，观察颜色后放入乙盒中，再从乙盒中任取一球.令 X,Y 分别表示从甲盒和乙盒中取到的红球个数，则 X 与 Y 的相关系数为___.

【答案】$\dfrac{1}{5}$

【解析】根据题设，可得随机变量 X 与 Y 的联合概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{2}{10}$
1	$\dfrac{2}{10}$	$\dfrac{3}{10}$

由此可得，

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

于是，

$$EX = EY = \frac{1}{2}, DX = DY = \frac{1}{4}, \quad EXY = \frac{3}{10}.$$

因此，

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\frac{3}{10} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}.$$

三、解答题：17—22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x}\right)$。

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】根据题设，则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x e^{t^2}dt}{e^x-1} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x - e^x + 1}{(e^x-1)\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\sin x - e^x + 1}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\sin x + \left(1+\int_0^x e^{t^2}dt\right)\cos x - e^x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\sin x + \int_0^x e^{t^2}dt\cos x + \cos x - 1 + 1 - e^x}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

（18）（本题满分 12 分）

设$u_n(x)=e^{-nx}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛域及和函数。

【答案】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(x)$收敛域为$(0,1]$，$S(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x+\dfrac{1}{e^x-1}, & x\in(0,1)\\ 1+\dfrac{1}{e-1}, & x=1\end{cases}$

【解析】令$u_1(x)=e^{-nx}$，$u_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

（1）先考查 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_1(x)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n$，

则当$\left|e^{-x}\right|<1$，即$x>0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$收敛；当$\left|e^{-x}\right|\ge 1$，即$x\le 0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$发散.

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$收敛域为$(0,+\infty)$.

（2）再考查 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，由于$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$，所以该幂级数的收敛半径

$R=\frac{1}{\rho}=1$，经过检验可知，当$x=\pm 1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$也收敛.所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$收敛域为$[-1,1]$.

综上可知，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(x)$收敛域为$(0,1]$.

（3）$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(e^{-x}\right)^n=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}\qquad x\in(0,1]$

令$S_2(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，则$S_2'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$

$S_2(x)=\int_0^x S_2'(t)dt+S_2(0)=\int_0^x-\ln(1-t)\,dt=(1-x)\ln(1-x)+x$.

$S_2(1)=\lim\limits_{x\to 1}S(x)=1$，故$S_2(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x, & x\in(0,1)\\ 1, & x=1\end{cases}$

故 $S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}(1-x)\ln(1-x)+x+\dfrac{1}{e^x-1}, & x\in(0,1)\\ 1+\dfrac{1}{e-1}, & x=1\end{cases}$

（19）（本题满分 12 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6\\4x+2y+z=30\end{cases}$，求 C 上的点到 xoy 坐标面距离的最大值

【答案】66

【解析】根据题设，构造符合条件的拉格朗日函数为

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+2y^2-z-6)+\mu(4x+2y+z-30),$$

于是由

$$L'_x=2\lambda x+4\mu=0$$

$$L'_y=4\lambda y+2\mu=0$$

$$L'_z=2z-\lambda+\mu=0$$

$$x^2+2y^2-z=6$$

$$4x+2y+z=30$$

可解得驻点为 $(4,1,12),(-8,-2,66)$.

于是，由比较可知，曲线 C 上的点 $(-8,-2,66)$ 到 xoy 坐标面的距离最大，且最大值为 66.

（20）（本题满分 12 分）

设 $D\subset R^2$ 是有界单连通闭区域，$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1.

（I）求 $I(D_1)$ 的值.

（II）计算 $\int\limits_{\partial D_1}\dfrac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}$，其中 ∂D_1 是 D_1 的正向边界.

【答案】（I）8π；（II）$-\pi$.

【解析】（I）根据二重积分的几何意义可知，当被积函数 $4-x^2-y^2$ 在区域 D 上大于零时，

$I(D)=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)dxdy$ 可以达到最大值.

故

$$D_1=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4\}\text{ 且 }I(D_1)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(4-r^2)rdr=8\pi.$$

【解法一】(II) 补曲线 $\partial D_2=\left\{(x,y)\big|x^2+4y^2=\varepsilon^2\right\}$（其中 ε 为很小的正数）.令曲线围成的区域为 D_2，取 D_2 的方向为顺时针方向.

则

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}\\&=\int\limits_{\partial D_1+\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}-\int\limits_{\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}\\&=0-\frac{1}{\varepsilon^2}e^{\varepsilon^2}\int\limits_{\partial D_2}xdx+4ydy-\frac{1}{\varepsilon^2}e^{\varepsilon^2}\int\limits_{\partial D_2}ydx-xdy\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}-2d\sigma=-\pi.\end{aligned}$$

【解法二】(II) 补曲线 $\partial D_2=\left\{(x,y)\big|x^2+4y^2=\varepsilon^2\right\}$（其中 ε 为很小的正数）.令曲线围成的区域为 D_2，取 D_2 的方向为顺时针方向.

则

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\partial D_1}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}\\&=\int\limits_{\partial D_1+\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}-\int\limits_{\partial D_2}\frac{(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy}{x^2+4y^2}\\&=0-\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{\partial D_2}(xe^{x^2+4y^2}+y)dx+(4ye^{x^2+4y^2}-x)dy\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D_2}-2d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot(-2)\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon}{2}=-\pi.\end{aligned}$$

(21)（本题满分 12 分））设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$，

（I）求正交矩阵 P，使 P^TAP 为对角矩阵；

（II）求正定矩阵 C，使 $C^2=(a+3)E-A$，E 为3阶单位矩阵。

【答案】$P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{2}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{4}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.

【解析】

（I）根据题设，由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a-\lambda&1&-1\\1&a-\lambda&-1\\-1&-1&a-\lambda\end{vmatrix}=(a-1-\lambda)^2(a+2-\lambda)=0$

可得 $\lambda_1=a+2,\lambda_{2,3}=a-1$.

由 $\left[A-(a+2)E\right]x=O$ 可得 A 的属于特征值 $a+2$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

由 $[A-(a-1)E]x=O$ 可得 A 的属于特征值 $a-1$ 的线性无关的特征向量为 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

令 $P=\left(\frac{\alpha_1}{|\alpha_1|},\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|},\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 $P^TAP=\begin{pmatrix}a+2&&\\&a-1&\\&&a-1\end{pmatrix}$.

（II）$P^TC^2P=P^T\left((a+3)E-A\right)P=(a+3)E-\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}$，由于 C 为正定矩阵，正定矩阵为实对称矩阵，故

$$C^2=CC^T=P\begin{pmatrix}1&&\\&4&\\&&4\end{pmatrix}P^T=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}P^T$$

$$=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\left(P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}\right)^T$$

所以$C=P\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt3}&\frac{-2}{\sqrt2}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{-1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt2}&\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&\frac{4}{\sqrt6}\end{pmatrix}$.

（22）（本题满分 12 分）

在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长的一段长度记为Y，令$Z=\frac{Y}{X}$.

（I）求X的概率密度；（II）求Z的概率密度；（III）求$E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

【答案】（I）$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & 其它\end{cases}$；（II）$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2}{(z+1)^2}, & z\ge1\\0, & others\end{cases}$；（III）$2\ln2-1$.

【解析】（I）根据题设，则$X\sim U(0,1)$，故

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\0, & 其它\end{cases}.$$

（II）由于$Y=2-X$，故$Z=\frac{Y}{X}=\frac{2}{X}-1$，因此

当$z<1$时$F_Z(z)=0$.

当$z\ge1$时

$$
\begin{aligned}
F_Z(Z) &= P(Z \le z) = P\left(\frac{2}{X} - 1 \le z\right) \\
&= P\left(\frac{2}{X} \le z+1\right) = P\left(X \ge \frac{2}{z+1}\right) \\
&= \int_{\frac{2}{z+1}}^{1} dx = \frac{z-1}{z+1}.
\end{aligned}
$$

综上可得，$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ \dfrac{z-1}{z+1}, & z \ge 1 \end{cases}$.

因此，$f_Z(z) = F_Z'(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{(z+1)^2}, & z \ge 1 \\ 0, & others \end{cases}$

（III）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right) = E\left(\dfrac{X}{2-X}\right) = \int_0^1 \dfrac{x}{2-x} dx = 2\ln 2 - 1$